

Applications - Chapitre 1

Etudier la mécanique



A.1.1 Dérivées de fonctions

A.1.2 Dérivées de compositions de fonctions

A.1.3 Développements limités de fonctions

A.1.4 Règle de calcul du produit vectoriel

A.1.5 Dérivée temporelle d'un produit de fonctions du temps

A.1.1 Dérivées de fonctions

A.1.2 Dérivées de compositions de fonctions

A.1.3 Développements limités de fonctions

A.1.4 Règle de calcul du produit vectoriel

A.1.5 Dérivée temporelle d'un produit de fonctions du temps

- Binôme de Newton :

$$(a + b)^n =$$

1 $f(x) = x^n \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

=

=

(A.1.1)

- Formule de trigonométrie :

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

② $f(x) = \sin(x)$ où $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

=

$$= \underbrace{\left(\quad \right)}_{=} + \underbrace{\left(\quad \right)}_{=}$$

=

(A.1.2)

- Formule de trigonométrie :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

3 $f(x) = \cos(x)$ où $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

=

$$= \underbrace{\left(\quad \right)}_{=} - \underbrace{\left(\quad \right)}_{=}$$

=

(A.1.3)

- Identité exponentielle :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

④ $f(x) = \exp(x)$ où $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

=

$$= \underbrace{\left(\dots \right)}_{=} =$$

(A.1.4)

- Identité logarithmique :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

5 $f(x) = \ln(x)$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

=

$$= \underbrace{\left(\quad \quad \quad \right)}_{=} =$$

(A.1.5)

A.1.1 Dérivées de fonctions

A.1.2 Dérivées de compositions de fonctions

A.1.3 Développements limités de fonctions

A.1.4 Règle de calcul du produit vectoriel

A.1.5 Dérivée temporelle d'un produit de fonctions du temps

$$1 \quad g(x) = \exp(f(x)) \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d \exp(f(x))}{dx} = \frac{d \exp(f(x))}{df(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

1

(A.1.6)

② $g(x) = \ln(f(x))$ où $x \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1

$$\begin{aligned}
 \frac{dg(x)}{dx} &= \frac{d \ln(f(x))}{dx} = \frac{d \ln(f(x))}{df(x)} \frac{df(x)}{dx} \\
 &= \left(\frac{d \ln(f(x))}{df(x)} \right) \frac{df(x)}{dx} \\
 &= \left(\underbrace{\left(\frac{d \ln(f(x))}{df(x)} \right)}_{=} \right) \\
 &= \left(\underbrace{\left(\frac{d \ln(f(x))}{df(x)} \right)}_{=} \right) \\
 &= \left(\underbrace{\left(\frac{d \ln(f(x))}{df(x)} \right)}_{=} \right)
 \end{aligned}$$

(A.1.7)

$$\frac{d \ln(f(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \frac{1}{f(x)} \quad (A.1.7)$$

- Intégration de l'équation (A.1.7) sur $x \in [a, b]$:

où

ainsi

(A.1.8)

A.1.1 Dérivées de fonctions

A.1.2 Dérivées de compositions de fonctions

A.1.3 Développements limités de fonctions

A.1.4 Règle de calcul du produit vectoriel

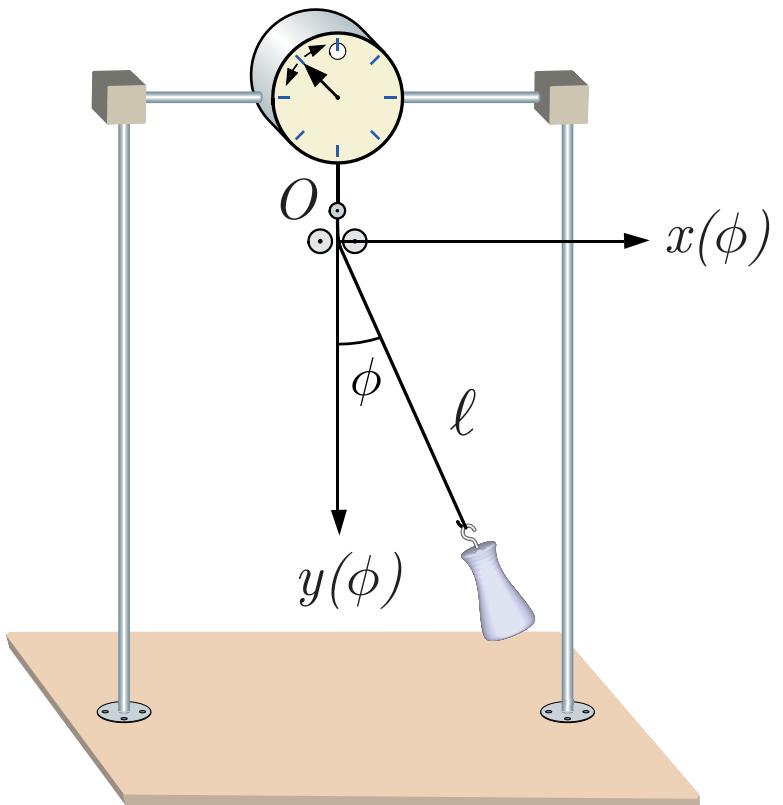
A.1.5 Dérivée temporelle d'un produit de fonctions du temps

- On considère un pendule de longueur $\ell = \text{cste}$ suspendu à l'origine O d'un système d'axes cartésiens Oxy .
- 1 Coordonnée de position (abscisse):

- Développement limité de $x(\phi)$ au 1^{er} ordre en ϕ autour de $\phi = 0$ (i.e. $\phi \ll 1$) :

$$x(\phi) \simeq$$

$$=$$

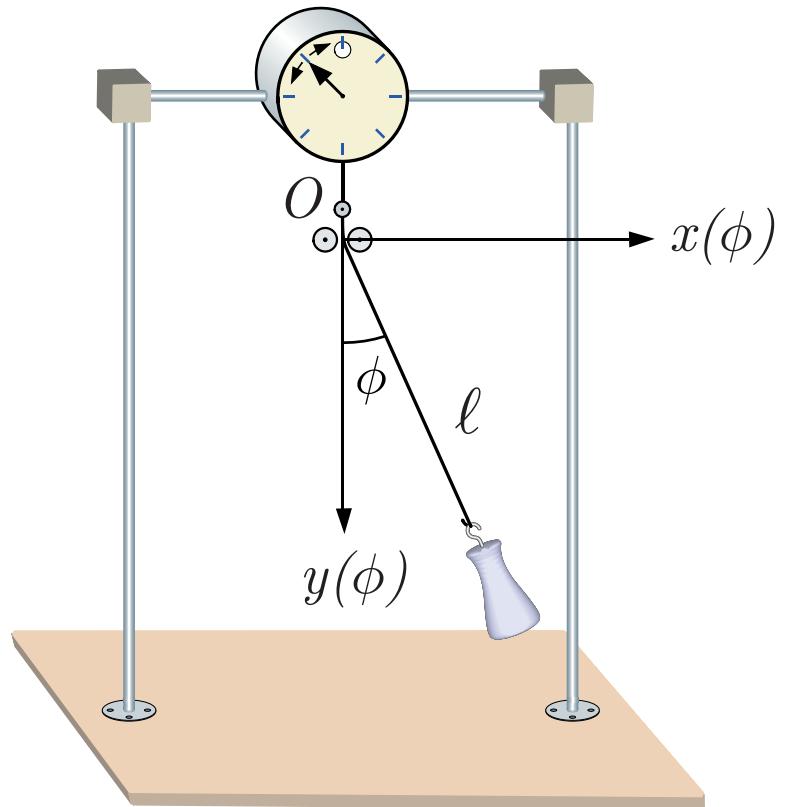


(A.1.9)

② Coordonnée de position (ordonnée):

- Développement limité de $y(\phi)$ au 1^{er} ordre en ϕ autour de $\phi = 0$ (i.e. $\phi \ll 1$) :

$$y(\phi) \simeq$$

 $=$ 
$$(A.1.10)$$

A.1.1 Dérivées de fonctions

A.1.2 Dérivées de compositions de fonctions

A.1.3 Développements limités de fonctions

A.1.4 Règle de calcul du produit vectoriel

A.1.5 Dérivée temporelle d'un produit de fonctions du temps

- Repère cartésien : $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

- 1 Règle de la main droite :

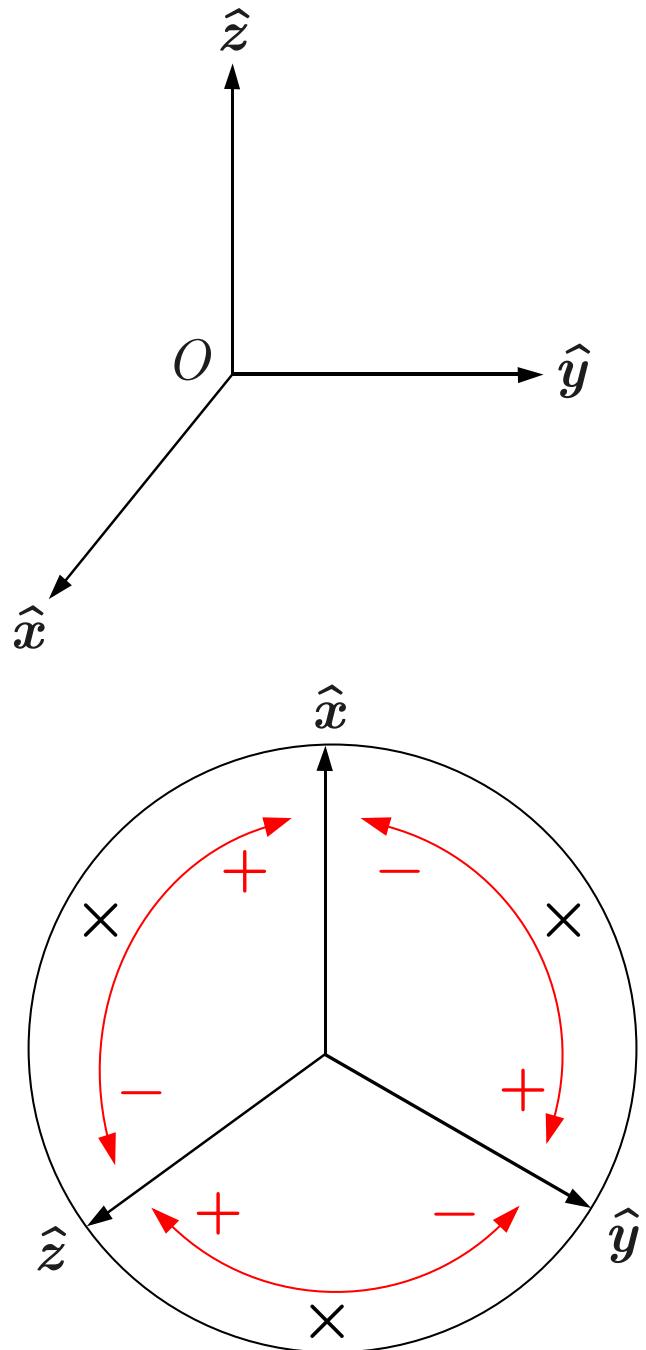
(A.1.11)

- $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ et $\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$
- $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ et $\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}$
- $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ et $\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y}$

- 2 Règle du logo “Mercedes” :

1 $\curvearrowright \Rightarrow$

2 $\curvearrowleft \Rightarrow$



A.1.1 Dérivées de fonctions

A.1.2 Dérivées de compositions de fonctions

A.1.3 Développements limités de fonctions

A.1.4 Règle de calcul du produit vectoriel

A.1.5 Dérivée temporelle d'un produit de fonctions du temps

- **Dérivée temporelle du produit** $f * g$:

- ① $f \equiv f(t)$ et $g \equiv g(t)$: fonctions scalaires ou vectorielles du temps.
- ② $(*)$: produit algébrique, scalaire (\cdot) ou vectoriel (\times).

- **Variation du produit** $f * g$ **entre** t **et** $t + \Delta t$:

$$\Delta(f * g) =$$

$$=$$

$$(1.31)$$

$$=$$

- **Dérivée temporelle du produit** $f * g$:

$$\frac{d}{dt}(f * g) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(f * g)}{\Delta t} = \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0}}_{\rightarrow} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$(1.32)$$